OLASILIKVE İSTATİSTİK

RASGELE DEĞİŞKENLERİN DİĞER KARAKTERİSTİKLERİ

Beklenen Değer

X rasgele değişkeni $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ değerlerini $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ olmak üzere $f(x_i) = P(X = x_i)$ olasılıkları ile alan *kesikli rasgele değişken* olsun. X in $E(x)$ ile gösterilen beklenen değeri

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots + x_n f(x_n) + \cdots$$

dir. Bu değere X in ortalaması veya kitle ortalaması denir.

X sürekli rasgele değişken ve olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ise

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

olarak tanımlanır.

Örnek. Bir zar bir kez atılsın. Üste gelen noktaların sayısının beklenen değeri kaçtır?

Çözüm.

X: *Üste gelen noktaların sayısı*

$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$X = x$	1	2	3	4	5	6
$f(x) = P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

olup,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i f(x_i) = (1)\frac{1}{6} + (2)\frac{1}{6} + (3)\frac{1}{6} + (4)\frac{1}{6} + (5)\frac{1}{6} + (6)\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 7/2$$

dir.

Örnek.

$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad diğer\ d. \end{cases}$ olsun. $E(X) = ?$

Çözüm.

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{1} x(1) dx = \int_{0}^{1} x dx = \frac{1}{2}$$

olur.

Soru.(1)

$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$ olsun. $E(X) = ?$

Beklenen değerin özellikleri

1) c bir sabit olmak üzere, $E(c) = c$ dir.
2) c bir sabit, X rasgele değişken olmak üzere; $E(cX) = cE(X)$ dir.
3) c ve d birer sabit, X rasgele değişken olmak üzere;

   $E(cX + d) = cE(X) + d$ dir.

4) X rasgele değişken olmak üzere $E[X - E(X)] = 0$ dır.

NOT. X ve Y rasgele değişkenler olmak üzere, $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ dir.

NOT. X ve Y bağımsız rasgele değişkenler ise, $E(XY) = E(X)E(Y)$ dir.

Tanım.(Bir rasgele değişkenin fonksiyonunun beklenen değeri)

X rasgele değişken olsun. $Y = g(X)$, X rasgele değişkeninin bir fonksiyonu olarak tanımlansın.

i) X kesikli rasgele değişken ise $E(Y) = E[g(X)] = \sum g(x_i)\, f(x_i)$

ii) X sürekli rasgele değişken ise $E(Y) = E[g(X)] = \int g(x) f(x) dx$

dir.

Örnek. X rasgele değişkeninin olasılık dağılımı

$X = x$	0	1	2
$f(x) = P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

olarak veriliyor.

a) $E(X) =?$, $E(2X) =?$, $E(3X-1) =?$, $E(X^2) =?$, $E(2X^2+1) =?$

$$E(X) = (0)\frac{1}{4} + (1)\frac{1}{2} + (2)\frac{1}{4} = 1$$

$$E(2X) = 2(0)\frac{1}{4} + 2(1)\frac{1}{2} + 2(2)\frac{1}{4} = 2 \quad yada \;\; E(2X) = 2E(X) = 2(1) = 2$$

$$E(3X-1) = 3E(X) - E(1) = 3(1) - 1 = 2$$

$$E(X^2) = \sum x^2\, f(x) = (0^2)\frac{1}{4} + (1^2)\frac{1}{2} + (2^2)\frac{1}{4} = 3/2$$

$$E(2X^2+1) = 2E(X^2) + E(1) = 2(\frac{3}{2})) + 1 = 4$$

b) $Y = 2X$ olarak tanımlanan Y rasgele değişkeninin ortalamasını bulunuz.

$$E(Y) = E(2X) = 2E(X) = 2(1) = 2$$

Örnek. X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} 2-2x & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases}$$

$Y = 6X$ olarak tanımlanan Y rasgele değişkeninin beklenen değerini bulunuz.

Çözüm.

$E(Y) = E(6X) = 6E(X) \ olur.$

$$E(X) = \int_0^1 x(2-2x)\,dx = \int_0^1 (2x-2x^2)\,dx = \frac{1}{3}$$

olup,

$$E(Y) = 6\left(\frac{1}{3}\right) = 2$$

bulunur.

Varyans

Bir X rasgele değişkeninin $V(X)$ yada σ_X^2 ile gösterilen varyansı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$V(X) = \sigma_X^2 = E[\,[X - E(X)]^2\,]$$

$X \ kesikli \ rasgele \ değişken \ ise$, $V(X) = \sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 f(x_i)$

$X \ sürekli \ rasgele \ değişken \ ise$, $V(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx$

olur.

Tanım.(Standart sapma)

X , μ ortalamalı ($\mu = E(X) \ dir$) kesikli yada sürekli rasgele değişken olsun. X-in standart sapması σ_X ile gösterilir ve

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{E[(X-\mu)^2]}$$

olarak tanımlanır.

NOT: X , $\mu = E(X)$ ortalamalı ve $V(X) = \sigma_X^2 = \sigma^2$ varyanslı rasgele değişken ise

$$\sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2$$

dir.

Varyansın Özellikleri

1) a bir sabit ve X rasgele değişken olmak üzere, $V(aX) = a^2V(X)$ dir.
2) b bir sabit ve X rasgele değişken olmak üzere, $V(X + b) = V(X)$ dir.
3) a ve b sabitler, X rasgele değişken olmak üzere. $V(aX + b) = a^2V(X)$ dir.

NOT: Birbirinden bağımsız X ve Y rasgele değişkenleri için

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$$

dir.

NOT: X ve Y rasgele değişkenlerinin ortalamaları sırasıyla μ_X ve μ_Y olmak üzere

$E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$ beklenen değerine X ve Y arasındaki " *kovaryans* " denir ve

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

ile hesaplanabilir.

Kovaryans, değişkenlerin birbiriyle nasıl bir ilişkiye sahip olduğu hakkında bilgi verir.

X ve Y rasgele değişkenleri bağımsız ise $Cov(X, Y) = 0$ dır. *Aksi doğru değildir.*

Tanım.(Pearson korelasyon katsayısı)

X ve Y rasgele değişkenleri arasındaki korelasyon

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

ile hesaplanır ve $-1 \leq \rho_{XY} \leq +1$ dir.

Örnek. Düzgün bir madeni para 3 defa atıldığında üste gelen turaların sayısının varyansını bulunuz.

Çözüm.

$$S = \{YYY, YYT, YTY, TYY, TTY, YTT, TYT, TTT\}$$

$$X\text{: Üste gelen turaların sayısı}$$

$$x = 0, 1, 2, 3$$

$X = x$	0	1	2	3
$f(x) = P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X) = (0)\frac{1}{8} + (1)\frac{3}{8} + (2)\frac{3}{8} + (3)\frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$E(X^2) = (0^2)\frac{1}{8} + (1^2)\frac{3}{8} + (2^2)\frac{3}{8} + (3^2)\frac{1}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

$$V(X) = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

bulunur.

Örnek. X sürekli rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} x/8 & ; \quad 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & ; \quad d.d. \end{cases}$$

Buna göre, Var(X) kaçtır? (**KPSS, ÖABT METEMATİK(LİSE), 2014**).

Çözüm.

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ dir.

$$E(X) = \int_0^4 x\,\frac{x}{8}\,dx = \frac{1}{8}\int_0^4 x^2\,dx = \frac{1}{8}\left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^4\right) = \frac{8}{3}$$

$$E(X^2) = \int_0^4 x^2\,\frac{x}{8}\,dx = \frac{1}{8}\int_0^4 x^3\,dx = \frac{1}{8}\left(\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^4\right) = \frac{32}{4}$$

$$V(X) = \frac{32}{4} - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{32}{4} - \frac{64}{9} = \frac{8}{9}$$

A) 3/4 B) 5/6 C) 7/8 D) 8/9 E) 11/12